

НКТП СССР
ГЛАВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ АВИАЦИОННОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ

Труды Центрального аэрогидродинамического института

Выпуск 170

Я. И. СЕКЕРЖ-ЗЕНЬКОВИЧ

ОБОБЩЕННАЯ СХЕМА КИРХГОФА
И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ
К ИЗУЧЕНИЮ ПОЛЯРЫ ЛИЛИЕНТАЛЯ

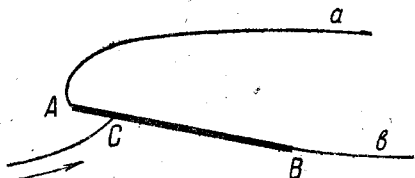


ОНТИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКВА 1934 ЛЕНИНГРАД

ПРЕДИСЛОВИЕ.

Кирхгоф рассмотрел обтекание пластинки, совершающееся по схеме фиг. а, где между линиями течения Aa и Bb находится область неподвижной жидкости (мертвая зона).

Позднее экспериментальным путем было доказано, что движение жидкости около крыла, которое мы схематически представляем пластинкой, происходит не по схеме Кирхгофа, а по схеме Жуковского-Чаплыгина (см. фиг. б).



Фиг. а. Обтекание пластинки по схеме Кирхгофа.



Фиг. б. Обтекание пластинки по схеме Жуковского-Чаплыгина.

Нетрудно понять причины, почему первая схема движения вытесняется второй, которая и осуществляется в действительности. Причины эти заключаются в вязкости движущейся жидкости. Движение, совершающееся по бокам мертвой зоны в случае схемы Кирхгофа, постепенно увлекает ¹⁾ соседние частицы, принадлежащие к мертвой зоне, высасывая таким образом жидкость из этой области.

При этом струя Aa (фиг. а) подсасывается к верхней стороне крыла, и мы получаем схему фиг. б.

Известно, однако, что схема фиг. б достаточно хорошо осуществляется только для малых углов атаки α . Если же угол α становится большим, то высасывание мертвой зоны полностью не осуществляется и часть ее продолжает существовать.

Мы приходим таким образом к обобщенной схеме Кирхгофа, изображенной на фиг. с. Здесь подсасывание верхней струи совершилось только на передней части крыла Am . К другой же части крыла попрежнему примыкает мертвая зона, которая только уменьшилась, но не исчезла вовсе.

Мысль об этой схеме впервые появилась у акад. С. А. Чаплыгина, который совместно с проф. А. Л. Лаврентьевым решил ²⁾ задачу о потоке, изображенном на фиг. с, при помощи общего метода Кирхгофа-Жуковского.

В то же время, когда, под влиянием личных разговоров с С. А. Чаплыгиным, мы — Я. И. Секерж-Зенькович и я — обдумывали эту работу, работа акад. С. А. Чап-



Фиг. с. Обобщенная схема Кирхгофа.

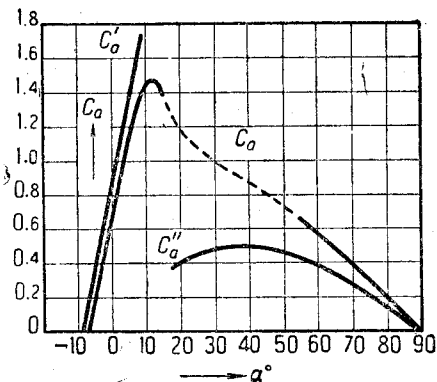
¹⁾ Не следует думать, что поток Жуковского-Чаплыгина осуществляется в таком порядке в действительности. Эксперименты Прандтля-Альборна (Prandtl-Ahlborn) показывают другой порядок явления. Рассуждение, приведенное в тексте, относится к воображаемому случаю, который имел бы место, если бы мы, взяв идеальную жидкость, сообщили ей движение Кирхгофа, а затем неожиданно изменили природу жидкости, сделав ее вязкой.

²⁾ С. А. Чаплыгин и А. Л. Лаврентьев, О подъемной силе и сопротивлении длинного плоского крыла в предположении срыва с его верхней поверхности, „Труды ЦАГИ“, вып. 123.

лыгина и проф. А. Л. Лаврентьева еще не была напечатана, хотя мы и знали о ее существовании. Поэтому нам для наших целей пришлось вторично решить ту же задачу. Наш прием решения несколько отличался от приема, принятого в названной работе, так как мы предпочли воспользоваться методом Леви-Чивита (Levi-Civita).

Центр тяжести этой работы заключается, однако, не в решении математической проблемы, а в исследовании при помощи этого решения экспериментального материала. В частности нас здесь занимает задача анализа профильного сопротивления крыла путем разложения его суммарной величины на отдельные слагаемые, каждое из которых связывается с действием определенной физической причины.

Исходным пунктом работы является мысль Кáрман, высказанная им ¹⁾ применительно к диаграмме фиг. d. На диаграмме этой по оси абсцисс отложены углы атаки крыла и по оси ординат значения подъемной силы для этих углов, получаемые при помощи различных приемов. Линия C_a' ($C_a' = 2\pi \sin \alpha$) изображает подъемные силы, даваемые теорией Жуковского, линия C_a получена нанесением экспериментальных данных



Фиг. d. Диаграмма проф. Кáрман.

и, наконец, линия C_a'' ($C_a'' = \frac{\pi \sin 2\alpha}{1 + \frac{\pi}{4} \sin \alpha}$) соответствует значениям подъемной силы, даваемым схемой Кирхгофа.

Проф. Кáрман обращает внимание на то, что экспериментальная кривая располагается как раз в промежутке между теми, которые даются теорией совершенного обтекания Жуковского с одной стороны, и теорией потока с полным срывом — с другой. При этом на малых углах атаки экспериментальная действительность лучше изображается теорией Жуковского, для углов

же α , близких к 90° , преимущество получает теория Кирхгофа.

Очевидно, обобщенная схема Кирхгофа при таких обстоятельствах может оказаться как раз тем недостающим звеном, которое свяжет обе эти теории воедино.

Поэтому, положив в основу своего материала экспериментальные данные, полученные в лаборатории Эйфеля при продувке пластинки, Я. И. Секерж-Зенькович подсчитывает подъемные силы, соответствующие различным значениям угла атаки α . Зная эти силы и пользуясь решением задачи Чаплыгина-Лаврентьева, представляется возможным для каждого угла α определить:

1) положение на спинке крыла точки m отрыва потока;

2) величину профильного сопротивления, развивающегося на крыле в потоке идеальной жидкости.

Кривые, изображенные в тексте на фиг. 14, обнаруживают, что вычисленные таким способом силы оказываются меньше действительных примерно на 60—40%. Таким образом существование мертвой зоны в состоянии объяснить только 40—60% того профильного сопротивления, которое мы наблюдаем экспериментально. Остальные 60—40% мы должны приписать вязкости потока и их следует изучать особо.

В заключительной части своей работы автор пытается определить коэффициенты, дающие возможность подсчитывать эти вязкие потери, причем после введения этих поправок данные расчета начинают хорошо совпадать с экспериментальными данными (см. фиг. 15).

П. Вальтер

22 июля 1933 г.

¹⁾ Riemann-Weber, Differentialgleichungen der Physik, B. II, стр. 782.

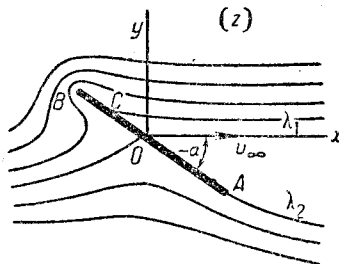
КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ.

В работе рассматривается обтекание пластинки со срывом струй в плоском потоке по обобщенной схеме Кирхгофа. Обобщение состоит в том, что одна из струй срывается не с конца пластинки, а с задней ее стороны. Подсчитанные по полученным для лобового сопротивления и подъемной силы формулам величины сравниваются с данными эксперимента. Если учесть лобовое сопротивление от подсоса за пластинкой и сопротивление трения потока о профиль, то подсчет хорошо совпадает с экспериментом; если этого не делать, то теоретическое сопротивление составляет 40—60% опытного. В заключение в работе дается метод получения теоретической величины подъемной силы, мало отличающейся от экспериментальной для большинства углов от 0 до 90°.

§ 1. Постановка задачи.

Наша задача состоит в том, чтобы отыскать плоско-параллельный поток, обтекающий со срывом струй плоскую пластинку, как показано на фиг. 1. Точка O является точкой разветвления потока; в точке B линия тока поворачивается на 180°; в точках A и C две ветви линии тока, прилежавшие к пластинке, переходят в две свободные струи-линии λ_1 и λ_2 , ограничивающие за пластинкой бесконечно длинную полосу неподвижной жидкости (мертвую зону). Вдоль линий λ_1 и λ_2 скорость постоянна по величине и равна скорости в бесконечности; это, как известно, является следствием уравнения Бернулли-Лагранжа, если поставить условие, чтобы давление оставалось непрерывным при переходе через линии λ_1 и λ_2 .

При решении поставленной задачи методом конформных отображений мы неизбежно получим в точке B бесконечно большую скорость. Действительно, рассматривая на пластинке точки, близкие к B , видим, что в них комплексный потенциал скоростей $f = \varphi + i\psi$ должен иметь два различных значения, при этом угол 2π при точке B плоскости (z) переходит в π на плоскости (f) , т. е. имеет место разложение:



Фиг. 1. Обтекание плоской пластинки по обобщенной схеме Кирхгофа.

$$f(z) = c_1(z - \alpha)^{\frac{1}{2}} + c_2(z - \alpha) + c_3(z - \alpha)^{\frac{3}{2}} + \dots + f_1(z);$$

здесь α — аффикс точки B и $f_1(z)$ — однозначная функция; c_i — коэффициенты разложения. Коэффициент $c_1 \neq 0$, так как отображение плоскости $u = (z - \alpha)^{\frac{1}{2}}$ на плоскость (f) конформно в точке α . Отсюда следует, что $\left| \frac{df}{dz} \right| = \infty$ при $z = \alpha$.

Построенный таким образом поток не является физически возможным, так как около точки B скорости достигают очень больших величин и, следовательно, давление, определяемое уравнением Бернулли

$$p = C - \frac{\rho v^2}{2},$$

становится при всяком значении константы C отрицательным. Однако, если выкинуть из рассмотрения небольшую область, окружающую точку B , то при достаточно большом C поток в остальной части плоскости оказывается вполне возможным.

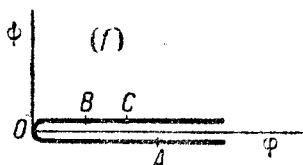
С подобного рода состоянием вопроса мы встречаемся в случае бесконечно тонкого крыла. Здесь тоже режим давлений, даваемых теорией, невозможно осуществить в действительности, вследствие заострения на переднем конце, около которого скорость потока очень велика. Опыт показал, однако, что, несмотря на это, поток, даваемый теорией, не слишком сильно отличается от действительного и что его можно употреблять в качестве первого приближения, позволяющего нам ориентироваться в явлении. Повидимому, большие скорости около переднего конца создают некоторые нерегулярности потока. Возможно даже, что в этой области возникает местный отрыв потока, и струи жидкости слегка отходят от стенок в месте их резкого излома; такие местные отступления, однако, как это можно показать, и теоретически не играют большого значения в общей совокупности явления.

В полном согласии с только что сказанным мы предполагаем в дальнейшем, что при изучении потока около крыла аэроплана, происходящего с отрывом струй, большие скорости на переднем остром конце особого значения не имеют и что поэтому на них можно просто не обращать внимания. Нас в настоящей работе интересует отрыв потока, происходящий около его заднего конца A , а не местный отрыв около B .

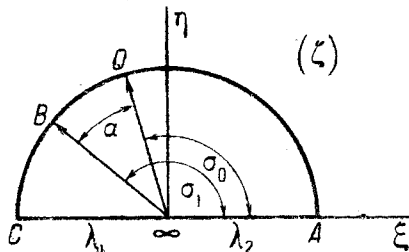
Если вычислить давление потока на рассматриваемую пластинку, выкидывая небольшую область около точки B , то можно показать (см. § 4), что оно будет сколь угодно мало отличаться от давления потока, обтекающего со срывом струй некоторый округленный контур конечной, но достаточно малой толщины, причем этот последний контур обтекается с конечной во всех его точках скоростью.

§ 2. Определение кинематических элементов потока.

Как известно, метод Кирхгофа состоит в отыскании комплексной аналитической функции $\chi = \chi(f)$, [$f = \varphi + i\psi$ — комплексный потенциал скоростей], удовлетворяющей уравнению $\frac{df}{dz} = \frac{1}{\chi}$ ($z = x + iy$ — комплексное переменное в области течения), условиям задачи на границах пластинки, на свободных струях и в бесконечности. Эта задача



Фиг. 2. Плоскость функции течения $f = \varphi + i\psi$.



Фиг. 3. Плоскость переменного $\zeta = \xi + i\eta$.

решается путем конформного отображения области, соответствующей нашему потоку в плоскости (f) на соответствующую область в плоскости функции χ . Леви-Чивита изменил метод Кирхгофа, введя промежуточное отображение области (f) на внутренность полукруга; причем сама полуокружность соответствует пластинке, а диаметр — свободным струям. Кроме того, Леви-Чивита вместо χ ищет функцию $\omega = -i \ln \chi$.

Нашу задачу будем решать методом Кирхгофа, видоизмененным Леви-Чивита.

Прежде всего, как обычно, в случае решения задачи Кирхгофа на обтекание тел соответствующей области потока областью функции $f = \varphi + i\psi$ будет у нас вся плоскость переменного f с разрезом вдоль положительной части действительной оси. Такая область показана на фиг. 2, причем точки фигуры, соответствующие определенным точкам плоскости z , обозначены у нас одинаковыми с последними

буквами. Область эта с внутренней областью полукруга радиуса единицы на плоскости $\zeta = \xi + i\eta$ (фиг. 3) связывается при помощи формулы:

$$f = a^2 \left[\cos \sigma_0 - \frac{1}{2} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right) \right]^2, \quad (1)$$

где

$$a^2 = \frac{(V\varphi_C + V\varphi_A)^2}{4}; \quad \cos \sigma_0 = \frac{V\varphi_C - V\varphi_A}{V\varphi_C + V\varphi_A};$$

$\varphi_C = OC$ — потенциал скоростей в точке C ; $\varphi_A = OA$ — в точке A ; кроме того, если положить $\zeta = e^{i\sigma}$, то σ_0 — аргумент, соответствующий точке O разветвления потока на пластинке, σ_1 соответствует точке B поворота струи на пластинке.

Формула (1) в согласии с методом Леви-Чивита устанавливает между рассматриваемыми областями следующее соответствие: $f = \infty$ соответствует $\zeta = 0$; обтекаемый контур пластинки ABC переходит в дугу полукруга, причем точкам A и C соответствуют концы полуцикла; свободные границы λ_1 и λ_2 струй переходят в диаметр круга.

1. Определение функции ω .

Займемся теперь отысканием функции $\omega = \theta + i\tau$; где θ — угол, образованный скоростью с осью x , $\tau = \ln v$, v — абсолютная величина скорости.

Функция ω должна удовлетворять следующим граничным условиям:

на дуге OA , т. е. при $0 \leq \sigma \leq \sigma_0$, надо, чтобы $\theta = R(\omega) = -\alpha^1$;

„ „ OB „ „ „ $\sigma_0 \leq \sigma \leq \sigma_1$ „ „ „ $\theta = \pi - \alpha$;

„ „ BC „ „ „ $\sigma_1 \leq \sigma \leq \pi$ „ „ „ $\theta = -\alpha$;

на диаметре AC $\tau = I(\omega) = 0$ (так как полагаем $v = \text{const} = 1$); кроме того, поставим условие, чтобы при $\zeta = 0$ ω было равно нулю ($\omega = 0$). Таким образом

область течения на плоскости (ω) является вертикальной полосой, ограниченной справа прямой OB (фиг. 4) и слева — прямой $BCAO$ с зубцом CDA .

Нетрудно видеть, что всем граничным условиям удовлетворяет функция

$$\omega = -i \ln \left[\frac{(\zeta - e^{i\sigma_1})(1 - e^{i\sigma_0}\zeta)}{(\zeta - e^{i\sigma_0})(e^{i\sigma_1}\zeta - 1)} \right] - (\alpha - \pi); \quad (2)$$

при этом, для выполнения поставленного условия, что $\omega = 0$ при $\zeta = 0$, должно иметь место соотношение:

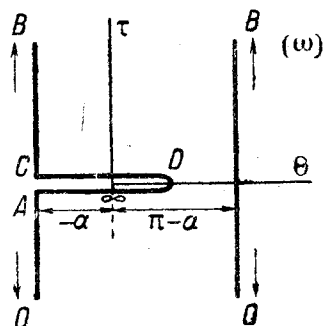
$$\sigma_1 - \sigma_0 = \alpha. \quad (3)$$

Действительно, на дуге круга $\zeta = e^{i\sigma}$, и формула (2) примет следующий вид:

$$\omega = -i \ln \left[\frac{\sin \frac{\sigma - \sigma_1}{2} \sin \frac{\sigma + \sigma_0}{2}}{\sin \frac{\sigma_0 - \sigma}{2} \sin \frac{\sigma + \sigma_1}{2}} \right] - (\alpha - \pi). \quad (2')$$

На дуге AO величина под знаком \ln отрицательна, и если мы будем в этом случае брать логарифмы по формуле $\ln z = \ln |z| - i\pi$, то получим в правой части (2') действительную часть, равную $-\alpha$; на дуге OB \ln имеет положительный аргумент, и следовательно, действительная часть ω равна $(\pi - \alpha)$; на дуге BC аргумент \ln отрицательный, поэтому действительная часть в формуле (2') равна $-\alpha$.

На диаметре COA модуль аргумента у логарифма будет равен единице, поэтому мнимая часть в формуле (2') равна нулю. В самом деле, нетрудно видеть, что, положив ζ равным действительному числу меньшему единицы, получим одинаковые



Фиг. 4. Вертикальная полоса, изображающая область течения на плоскости (ω).

¹⁾ $R(\omega)$ — действительная часть функции ω , $I(\omega)$ — ее мнимая часть.

модули в квадратной скобке формулы (2) у первого множителя числителя и второго в знаменателе, а также у второго множителя числителя и первого в знаменателе.

2. Определение a^2 .

При подсчете сопротивления придется также пользоваться формулой (1), в которую входит параметр a^2 . Выразим его через α , σ_1 и длину пластинки l .

Из основной формулы $\frac{df}{dz} = e^{-i\omega}$ имеем: $dz = e^{i\omega} df$. Так как, кроме того, в силу (1)

$$df = \frac{a^2}{2} \left(-2 \cos \sigma_0 + \zeta + \frac{1}{\zeta} \right) \left(\zeta - \frac{1}{\zeta} \right) \frac{d\zeta}{\zeta},$$

то

$$dz = \frac{1}{2} a^2 e^{i\omega} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} - 2 \cos \sigma_0 \right) \left(\zeta - \frac{1}{\zeta} \right) \frac{d\zeta}{\zeta}. \quad (4)$$

Чтобы получить длину пластинки l , представим ее в виде:

$$AO + OB = l. \quad (5)$$

Для нахождения AO и OB надо, очевидно, в (4) положить $\zeta = e^{i\sigma}$ и взять интеграл от модуля (4) ($ds = |dz|$) в пределах от $\sigma = 0$ до $\sigma = \sigma_0$ для AO и для OB — от $\sigma = \sigma_0$ до $\sigma = \sigma_1$. В силу этого имеем:

$$AO = 2a^2 \int_0^{\sigma_0} |e^{i\omega}| (\cos \sigma - \cos \sigma_0) \sin \sigma d\sigma;$$

$$OB = 2a^2 \int_{\sigma_0}^{\sigma_1} |e^{i\omega}| (\cos \sigma - \cos \sigma_0) \sin \sigma d\sigma.$$

Из формулы (2) следует, что

$$|e^{i\omega}| = \left| \frac{\sin \frac{\sigma - \sigma_1}{2} \sin \frac{\sigma_0 + \sigma}{2}}{\sin \frac{\sigma_1 + \sigma}{2} \sin \frac{\sigma_0 - \sigma}{2}} \right| = |e^{-\tau}|.$$

Таким образом необходимо вычислить интеграл

$$I' = \int_0^{\sigma_0} \frac{\sin \frac{\sigma - \sigma_1}{2} \sin \frac{\sigma_0 + \sigma}{2}}{\sin \frac{\sigma_1 + \sigma}{2} \sin \frac{\sigma_0 - \sigma}{2}} (\cos \sigma - \cos \sigma_0) \sin \sigma d\sigma$$

и интеграл I'' , у которого подинтегральная функция та же, а пределы равны σ_0 и σ_1 .

Преобразуя подинтегральную функцию, видим, что вычисление этих интегралов приводится к нахождению интеграла

$$I = \int \frac{\sin \frac{\sigma - \sigma_1}{2}}{\sin \frac{\sigma + \sigma_1}{2}} \sin^2 \frac{\sigma + \sigma_0}{2} \sin \sigma d\sigma. \quad (a)$$

Делаем замену переменных, положив $\frac{\sigma + \sigma_1}{2} = \varphi$; тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} I &= \int \frac{\sin (\varphi - \sigma_1)}{\sin \varphi} \sin^2 \frac{2\varphi - \sigma_1 + \sigma_0}{2} \sin (2\varphi - \sigma_1) d\varphi = \\ &= \int \sin^2 \frac{2\varphi - \sigma_1 + \sigma_0}{2} \sin (2\varphi - \sigma_1) \cos \sigma_1 d\varphi - \\ &= \int \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} \sin^2 \frac{2\varphi - \sigma_1 + \sigma_0}{2} \sin (2\varphi - \sigma_1) \sin \sigma_1 d\varphi. \end{aligned} \quad (b)$$

Обозначив первый интеграл в выражении (b) через I_1 и второй через I_2 , находим:

$$I_1 = \frac{1}{2} \int \sin(2\varphi - \sigma_1) \cos \sigma_1 d\varphi - \frac{1}{2} \int \cos(2\varphi + \sigma_0 - \sigma_1) \sin(2\varphi - \sigma_1) \cos \sigma_1 d\varphi =$$

$$= -\frac{1}{4} \cos(2\varphi - \sigma_1) \cos \sigma_1 + \frac{1}{16} \cos(4\varphi - 2\sigma_1 + \sigma_0) \cos \sigma_1 + \frac{\varphi}{4} \cos \sigma_1 \sin \sigma_0; \quad (c)$$

$$I_2 = \frac{\sin \sigma_1}{2} \int \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} \sin(2\varphi - \sigma_1) d\varphi - \frac{\sin \sigma_1}{2} \int \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} \cos(2\varphi - \sigma_1 + \sigma_0) \sin(2\varphi - \sigma_1) d\varphi =$$

$$= \frac{\sin \sigma_1}{2} I_2' - \frac{\sin \sigma_1}{2} I_2''. \quad (d)$$

Вычислим отдельно интегралы I_2' и I_2'' . Легко видеть, что

$$I_2' = \int \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} [\sin \varphi \cos(\varphi - \sigma_1) + \cos \varphi \sin(\varphi - \sigma_1)] d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2} \int [\cos(2\varphi - \sigma_1) + \cos \sigma_1] d\varphi + \int \frac{\sin(\varphi - \sigma_1)}{\sin \varphi} d\varphi - \int \sin \varphi \sin(\varphi - \sigma_1) d\varphi;$$

отсюда, произведя вычисления, получаем:

$$I_2' = \frac{1}{2} \sin(2\varphi - \sigma_1) + \varphi \cos \sigma_1 - \ln(\sin \varphi) \sin \sigma_1.$$

Обращаясь ко второму интегралу, имеем:

$$I_2'' = \int \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} \cos(2\varphi - \sigma_1 + \sigma_0) \sin(2\varphi - \sigma_1) d\varphi =$$

$$= \int \cos \varphi \cos(2\varphi - \sigma_1 + \sigma_0) \cos(\varphi - \sigma_1) d\varphi + \int \frac{\cos(2\varphi - \sigma_1 + \sigma_0) \sin(\varphi - \sigma_1)}{\sin \varphi} d\varphi -$$

$$- \int \sin \varphi \cos(2\varphi - \sigma_1 + \sigma_0) \sin(\varphi - \sigma_1) d\varphi;$$

вычисляя далее, получаем:

$$I_2'' = \int \cos(2\varphi - \sigma_1 + \sigma_0) \cos(2\varphi - \sigma_1) d\varphi +$$

$$+ \int \cos(2\varphi - \sigma_1 + \sigma_0) \cos \sigma_1 d\varphi - \int \frac{\cos(2\varphi - \sigma_1 + \sigma_0) \cos \varphi \sin \sigma_1}{\sin \varphi} d\varphi =$$

$$= \int \cos(2\varphi - \sigma_1 + \sigma_0) \cos(2\varphi - \sigma_1) d\varphi + \frac{1}{2} \sin(2\varphi - \sigma_1 + \sigma_0) \cos \sigma_1 -$$

$$- \int \frac{(1 - \sin^2 \varphi) \cos(\varphi - \sigma_1 + \sigma_0)}{\sin \varphi} \sin \sigma_1 d\varphi + \int \sin(\varphi - \sigma_1 + \sigma_0) \cos \varphi \sin \sigma_1 d\varphi.$$

После простых преобразований последние интегралы легко вычисляются, и мы находим:

$$I_2'' = -\ln(\sin \varphi) \sin \sigma_1 \cos(\sigma_0 - \sigma_1) - \varphi \sin \sigma_1 \sin(\sigma_1 - \sigma_0) + \frac{\varphi}{2} \sin \sigma_1 \sin(\sigma_1 - \sigma_0) -$$

$$- \frac{1}{4} \cos(2\varphi - \sigma_1 + \sigma_0) \overset{\sin \sigma_1}{\cancel{\cos(2\varphi - \sigma_1 + \sigma_0)}} \cos(2\varphi - \sigma_1 + \sigma_0) \sin \sigma_1 - \frac{\varphi}{2} \sin \sigma_1 \sin(\sigma_1 - \sigma_0) +$$

$$+ \frac{1}{8} \sin(4\varphi - 2\sigma_1 + \sigma_0) + \frac{\varphi}{2} \cos \sigma_0 + \frac{1}{2} \sin(2\varphi - \sigma_1 + \sigma_0) \cos \sigma_1.$$

Сделав упрощения, имеем окончательно:

$$I_2'' = -\ln(\sin \varphi) \sin \sigma_1 \cos(\sigma_0 - \sigma_1) - \varphi \sin \sigma_1 \sin(\sigma_1 - \sigma_0) +$$

$$+ \frac{1}{2} \sin(2\varphi - 2\sigma_1 + \sigma_0) + \frac{1}{8} \sin(4\varphi - 2\sigma_1 + \sigma_0) + \frac{\varphi}{2} \cos \sigma_0.$$

Подставив I_2' и I_2'' в (d), затем (d) и (c) в (b), получаем:

$$I = 2I_1 - 2I_2 = -\frac{1}{2} \cos(2\varphi - \sigma_1) \cos \sigma_1 + \frac{1}{8} \cos(4\varphi - 2\sigma_1 + \sigma_0) \cos \sigma_1 +$$

$$+ \frac{\varphi}{2} \cos \sigma_1 \sin \sigma_0 - \frac{1}{2} \sin(2\varphi - \sigma_1) \sin \sigma_1 - \varphi \cos \sigma_1 \sin \sigma_1 + \ln(\sin \varphi) \sin^2 \sigma_1 -$$

$$- \ln(\sin \varphi) \sin^2 \sigma_1 \cos(\sigma_0 - \sigma_1) - \varphi \sin^2 \sigma_1 \sin(\sigma_1 - \sigma_0) + \frac{1}{2} \sin(2\varphi - 2\sigma_1 + \sigma_0) \sin \sigma_1 +$$

$$+ \frac{1}{8} \sin(4\varphi - 2\sigma_1 + \sigma_0) \sin \sigma_1 + \frac{\varphi}{2} \cos \sigma_0 \sin \sigma_1;$$

откуда

$$I = -\frac{1}{2} \cos(2\varphi - 2\sigma_1) + \frac{1}{8} \cos(4\varphi - 3\sigma_1 + \sigma_0) + \varphi \left[\frac{\cos \sigma_1 \sin \sigma_0}{2} - \cos \sigma_1 \sin \sigma_1 + \right. \\ \left. + \frac{\cos \sigma_0 \sin \sigma_1}{2} - \sin^2 \sigma_1 \sin(\sigma_1 - \sigma_0) \right] + \frac{1}{2} \sin(2\varphi - 2\sigma_1 + \sigma_0) \sin \sigma_1 + \\ + \ln(\sin \varphi) \sin^2 \sigma_1 [1 - \cos(\sigma_0 - \sigma_1)]. \quad (e)$$

Так как в силу (3) $\sigma_0 = \sigma_1 - \alpha$, то

$$I = -\frac{1}{2} \cos(2\varphi - 2\sigma_1) + \frac{1}{8} \cos(4\varphi - 2\sigma_1 - \alpha) + \frac{1}{2} \sin(2\varphi - \sigma_1 - \alpha) \sin \sigma_1 + \\ + \varphi A + 2 \ln(\sin \varphi) \sin^2 \sigma_1 \sin^2 \frac{\alpha}{2}, \quad (6)$$

где

$$A = \frac{1}{2} \sin(2\sigma_1 - \alpha) - \sin^2 \sigma_1 \sin \alpha - \cos \sigma_1 \sin \sigma_1 = \\ = \frac{1}{2} (\sin 2\sigma_1 \cos \alpha - \sin \alpha - \sin 2\sigma_1). \quad (7)$$

Таким образом формула (6) дает значение интеграла, входящего в формулу (а).

Заметив, что подынтегральная функция в пределах интегрирования знака не меняет, оставаясь отрицательной, заменяем в формуле (5) сумму интегралов I' и I'' одним интегралом от $\sigma = \sigma_1$ до $\sigma = 0$ или, так как $\varphi = \frac{\sigma + \sigma_1}{2}$, то в пределах от $\varphi = \sigma_1$ до $\varphi = \frac{\sigma_1}{2}$ (пределы переставлены, так как берется интеграл от модуля); в силу этого находим:

$$I = 2a^2 \int_{\sigma_1}^{\frac{\sigma_1}{2}} \left\{ -\cos(2\varphi - 2\sigma_1) + \frac{1}{4} \cos(4\varphi - 2\sigma_1 - \alpha) + \sin(2\varphi - \sigma_1 - \alpha) \sin \sigma_1 + \right. \\ \left. + 2\varphi A + 4 \ln(\sin \varphi) \sin^2 \sigma_1 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right\};$$

откуда:

$$I = 2a^2 \left\{ 1 - \cos \sigma_1 + \frac{1}{4} [\cos \alpha - \cos(2\sigma_1 - \alpha)] - [\sin \alpha + \sin(\sigma_1 - \alpha)] \sin \sigma_1 - \right. \\ \left. - \sigma_1 A - 4 \ln \left(2 \cos \frac{\sigma_1}{2} \right) \sin^2 \sigma_1 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right\};$$

или, преобразуя, имеем:

$$I = 2a^2 \left\{ 2 \sin^2 \frac{\sigma_1}{2} - \frac{1}{2} \sin \sigma_1 \sin(\sigma_1 - \alpha) - \sin \alpha \sin \sigma_1 - \sigma_1 A - 4 \ln \left(2 \cos \frac{\sigma_1}{2} \right) \sin^2 \sigma_1 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right\}.$$

Таким образом для a^2 имеем окончательно следующее выражение:

$$a^2 = \frac{I}{2 \left\{ 2 \sin^2 \frac{\sigma_1}{2} - \frac{1}{2} \sin \sigma_1 \sin(\sigma_1 - \alpha) - \sin \alpha \sin \sigma_1 - \sigma_1 A - 4 \ln \left(2 \cos \frac{\sigma_1}{2} \right) \sin^2 \sigma_1 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right\}}. \quad (8)$$

3. Формула для AC.

Весьма характерной для потока является длина AC отрезка пластинки, соприкасающегося с мертвой зоной (неподвижной жидкостью за пластинкой). Выведем формулу для этой величины.

Из фиг. 1 следует, что

$$AC = l - BC. \quad (9)$$

Таким образом необходимо вычислить BC . В силу формулы (4) нетрудно видеть, что (полагая $\zeta = e^{i\sigma}$):

$$BC = 2a^2 \int_{\sigma_1}^{\pi} \frac{\sin \frac{\sigma - \sigma_1}{2} \sin \frac{\sigma_0 + \sigma}{2}}{\sin \frac{\sigma_1 + \sigma}{2} \sin \frac{\sigma_0 - \sigma}{2}} (\cos \sigma - \cos \sigma_0) \sin \sigma d\sigma,$$

знак модуля опущен, так как подинтегральная функция в рассматриваемых пределах положительна. Перейдя к переменному $\varphi = \frac{\sigma + \sigma_1}{2}$ и воспользовавшись формулами (6) и (7), находим:

$$BC = 2a^2 \left| \frac{\pi + \sigma_1}{2} \right| \left\{ -\cos(2\varphi - 2\sigma_1) + \frac{1}{4} \cos(4\varphi - 2\sigma_1 - \alpha) + \sin(2\varphi - \sigma_1 - \alpha) \sin \sigma_1 + \right. \\ \left. + 2\varphi A + 4 \ln(\sin \varphi) \sin^2 \sigma_1 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right\};$$

отсюда:

$$BC = 2a^2 \left\{ 2 \cos^2 \frac{\sigma_1}{2} - \frac{1}{2} \sin \sigma_1 \sin(\sigma_1 - \alpha) + \sin \alpha \sin \sigma_1 + (\pi - \sigma_1) A - \right. \\ \left. - 4 \ln \left(2 \sin \frac{\sigma_1}{2} \right) \sin^2 \sigma_1 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right\}. \quad (10)$$

Подставив эту величину BC и величину l из формулы (8) в формулу (9), находим выражение для AC в следующем виде:

$$AC = 2a^2 \left\{ 4 \ln \left(\operatorname{tg} \frac{\sigma_1}{2} \right) \sin^2 \sigma_1 \sin^2 \frac{\alpha}{2} - 2 \cos \sigma_1 - 2 \sin \alpha \sin \sigma_1 - \pi A \right\}. \quad (11)$$

4. Исследование кривизны свободной струи около точки C .

Для выяснения реальности рассматриваемого обтекания необходимо исследовать поведение свободной струи около точки срыва C и показать, что она не заворачивает обратно на переднюю сторону, к пластинке. Для этого достаточно исследовать изменение угла θ на струе около точки C . Мы покажем, что θ увеличивается, откуда в силу непрерывности θ как функции ζ будет следовать, что струя отходит от точки C в правильном направлении, как это изображено на фиг. 1.

Чтобы найти формулу для $\theta(\zeta)$ (действительной части функции ω), перепишем выражение для ω так:

$$\omega = i \ln \frac{\zeta - e^{i\sigma_0}}{1 - \zeta e^{i\sigma_0}} + i \ln \frac{\zeta e^{i\sigma_1} - 1}{\zeta - e^{i\sigma_1}} - (\alpha - \pi);$$

или, вынося минус у аргумента первого члена и принимая $\ln(-1) = -i\pi$, имеем:

$$\omega = i \ln \frac{\zeta e^{i\sigma_1} - 1}{\zeta - e^{i\sigma_1}} - i \ln \frac{\zeta e^{i\sigma_0} - 1}{\zeta - e^{i\sigma_0}} - \alpha.$$

После простых преобразований находим:

$$\omega = i \ln \frac{1 - i \frac{1 + \zeta}{1 - \zeta} \operatorname{tg} \frac{\sigma_1}{2}}{1 + i \frac{1 + \zeta}{1 - \zeta} \operatorname{tg} \frac{\sigma_1}{2}} - i \ln \frac{1 - i \frac{1 + \zeta}{1 - \zeta} \operatorname{tg} \frac{\sigma_0}{2}}{1 + i \frac{1 + \zeta}{1 - \zeta} \operatorname{tg} \frac{\sigma_0}{2}}. \quad (12)$$

В силу известной формулы

$$\operatorname{arctg} u = \frac{1}{2i} \ln \frac{1 + iu}{1 - iu}$$

и так как ζ действительно на свободной струе, то из (12) окончательно получаем, что на этой струе $\theta(\zeta)$ выражается так:

$$\theta(\zeta) = 2 \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{1+\zeta}{1-\zeta} \operatorname{tg} \frac{\sigma_1}{2} \right) - \operatorname{arctg} \left(\frac{1+\zeta}{1-\zeta} \operatorname{tg} \frac{\sigma_0}{2} \right) \right] - \alpha. \quad (13)$$

Дифференцируя (13) по ζ и сделав небольшие преобразования, получим:

$$d\theta(\zeta) = 4 \frac{\left(\operatorname{tg} \frac{\sigma_1}{2} - \operatorname{tg} \frac{\sigma_0}{2} \right) \left[(1-\zeta)^2 - (1+\zeta)^2 \operatorname{tg} \frac{\sigma_1}{2} \operatorname{tg} \frac{\sigma_0}{2} \right]}{\left[(1-\zeta)^2 + (1+\zeta)^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\sigma_1}{2} \right] \left[(1-\zeta)^2 + (1+\zeta)^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\sigma_0}{2} \right]} d\zeta. \quad (14)$$

Формула (14) позволяет судить об изменении $\theta(\zeta)$: очевидно, что, если знак $d\theta(\zeta)$ положительный, то θ растет, если же отрицательный, то уменьшается.

Исследуя знак у $d\theta(\zeta)$ около точки C , т. е. при ζ , близком к минус единице, и принимая во внимание, что угол $\frac{\sigma_1}{2} > \frac{\sigma_0}{2}$ и лежит в первой четверти, видим, что знак в правой части формулы (14) определяется знаком выражения:

$$(1-\zeta)^2 - (1+\zeta)^2 \operatorname{tg} \frac{\sigma_1}{2} \operatorname{tg} \frac{\sigma_0}{2}. \quad (15)$$

Как показывает таблица 1 (см. приложение), $\frac{\sigma_0}{2} < \frac{\sigma_1}{2} < 90^\circ$ для углов атаки от 0° до 88° , следовательно, $\operatorname{tg} \frac{\sigma_1}{2} \operatorname{tg} \frac{\sigma_0}{2}$ — величина конечная; из этого очевидно, что при ζ достаточно близких к минус единице знак в выражении (15) положительный. Отсюда, как уже указано, следует, что свободная струя от точки C идет правильно.

§ 3. Вывод формул для подъемной силы и лобового сопротивления.

Обозначим через R полное сопротивление пластинки, R_y — его проекцию на ось y , R_x — проекцию на ось x ; R_y является подъемной силой, R_x — лобовым сопротивлением, так как ось x направлена по скорости в бесконечности; через p назовем давление, перпендикулярное к пластинке. Нетрудно видеть, что

$$\left. \begin{aligned} R_y &= \int_{AOBCA} p \cos(n, y) ds; \\ R_x &= \int_{AOBCA} p \cos(n, x) ds; \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

где $AOBCA$ — контур пластинки (фиг. 1); n — нормаль к пластинке.

Выражая давление через скорость, по уравнению Бернулли-Лагранжа имеем:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} = C,$$

где C — величина, одинаковая для всех точек жидкости. За пластинкой в полосе неподвижной жидкости $v=0$, $p=p_0$; на свободных границах струи также $p=p_0$; в бесконечности $v=1$, $p=p_0$.

Из последнего условия находим: $\frac{p_0}{\rho} + \frac{1}{2} = C$.

Таким образом окончательно имеем следующую формулу для давления:

$$p = p_0 + \frac{\rho}{2} (1 - v^2). \quad (17)$$

Как показывает формула (17), подинтегральная функция в формулах (16) в точке B обращается в бесконечность. Следовательно, интегралы (16) являются несобственными. Их будем рассматривать, как пределы интегралов, взятых по контуру $AOabdCA$ (фиг. 5) при стремлении диаметра выкинутой области abd к нулю. При подсчете интегралов таким способом получим величину сопротив-

ления, соответствующую действительности в том смысле, как это указано в § 1. Принятый способ вычисления сопротивления соответствует методу Леви-Чивита и Вилла (Villat).

Обращаясь к вычислению интегралов (16), имеем для вектора полного сопротивления R в комплексной плоскости следующее выражение:

$$R = R_x + iR_y = \frac{1}{i} \int_L p \, dz,$$

или

$$R = \frac{1}{i} \int_{L'} \left[p_0 + \frac{\rho}{2} (1 - v^2) \right] dz + \frac{1}{i} \int_{CA} p_0 \, dz = \frac{1}{i} \int_L p_0 \, dz + \frac{\rho}{2i} \int_{L'} (1 - v^2) dz;$$

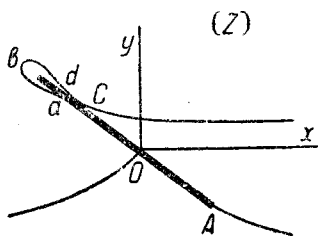
здесь L — контур $AOabdCA$ и $L' = AOabdC$.

Так как первый член в последней формуле обращается в нуль, то

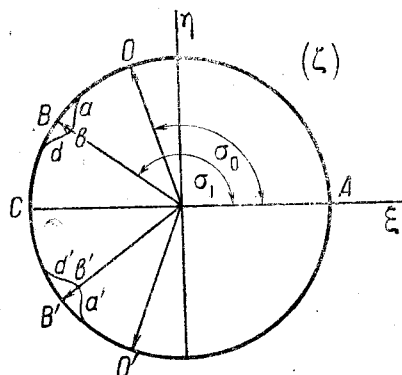
$$R = \frac{\rho}{2i} \int_{L'} (1 - v^2) dz;$$

откуда, в силу формул $dz = df e^{i\omega}$ и $v = e^{\tau}$

$$R = \frac{\rho}{2i} \int_{L'} e^{i\omega} df - \frac{\rho}{2i} \int_{L'} e^{2\tau + i\omega} df. \quad (18)$$



Фиг. 5. Контур, по которому взяты интегралы формулы (18).



Фиг. 6. Контур, по которому взят интеграл формулы (20).

Так как функции ω и f заданы на плоскости (ζ) , то интеграл в формуле (18) будем считать взятым по контуру, обозначенному теми же буквами, но на плоскости (ζ) (фиг. 6).

Функцию $\omega(\zeta)$ аналитически (по принципу симметрии) продолжим на полуокруг, симметричный с данным по отношению к диаметру. Нетрудно видеть, что

$$i\omega\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right) = i\theta + \tau = i\theta + 2\tau - \tau = i\omega(\zeta) + 2\tau.$$

Кроме того, значения $\tau \, df$ в точках ζ и $\frac{1}{\bar{\zeta}}$ равны между собою. Поэтому имеем:

$$-\int_{L'} e^{2\tau + i\omega} df = -\int_{L'_1} e^{i\omega} df = \int_{L'_1} e^{i\omega} df, \quad (19)$$

где $L'_1 = AO'a'b'd'C$ — контур, симметричный с данным относительно диаметра AC ; $L'_1 = Cd'b'a'O'A$.

Заменяя в (18) второй член из (19), для вектора сопротивления находим окончательно такую формулу:

$$R = \frac{\rho}{2i} \int_{\Gamma} e^{i\omega} \frac{df}{d\zeta} d\zeta, \quad (20)$$

где через Γ обозначен замкнутый контур $AOabdCd'b'a'O'A$.

и так как ζ действительно на свободной струе, то из (12) окончательно получаем, что на этой струе $\theta(\zeta)$ выражается так:

$$\theta(\zeta) = 2 \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{1+\zeta}{1-\zeta} \operatorname{tg} \frac{\sigma_1}{2} \right) - \operatorname{arctg} \left(\frac{1+\zeta}{1-\zeta} \operatorname{tg} \frac{\sigma_0}{2} \right) \right] - \alpha. \quad (13)$$

Дифференцируя (13) по ζ и сделав небольшие преобразования, получим:

$$d\theta(\zeta) = 4 \frac{\left(\operatorname{tg} \frac{\sigma_1}{2} - \operatorname{tg} \frac{\sigma_0}{2} \right) \left[(1-\zeta)^2 - (1+\zeta)^2 \operatorname{tg} \frac{\sigma_1}{2} \operatorname{tg} \frac{\sigma_0}{2} \right]}{\left[(1-\zeta)^2 + (1+\zeta)^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\sigma_1}{2} \right] \left[(1-\zeta)^2 + (1+\zeta)^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\sigma_0}{2} \right]} d\zeta. \quad (14)$$

Формула (14) позволяет судить об изменении $\theta(\zeta)$: очевидно, что, если знак $d\theta(\zeta)$ положительный, то θ растет, если же отрицательный, то уменьшается.

Исследуя знак у $d\theta(\zeta)$ около точки C , т. е. при ζ , близком к минус единице, и принимая во внимание, что угол $\frac{\sigma_1}{2} > \frac{\sigma_0}{2}$ и лежит в первой четверти, видим, что знак в правой части формулы (14) определяется знаком выражения:

$$(1-\zeta)^2 - (1+\zeta)^2 \operatorname{tg} \frac{\sigma_1}{2} \operatorname{tg} \frac{\sigma_0}{2}. \quad (15)$$

Как показывает таблица 1 (см. приложение), $\frac{\sigma_0}{2} < \frac{\sigma_1}{2} < 90^\circ$ для углов атаки от 0° до 88° , следовательно, $\operatorname{tg} \frac{\sigma_1}{2} \operatorname{tg} \frac{\sigma_0}{2}$ — величина конечная; из этого очевидно, что при ζ достаточно близких к минус единице знак в выражении (15) положительный. Отсюда, как уже указано, следует, что свободная струя от точки C идет правильно.

§ 3. Вывод формул для подъемной силы и лобового сопротивления.

Обозначим через R полное сопротивление пластинки, R_y — его проекцию на ось y , R_x — проекцию на ось x ; R_y является подъемной силой, R_x — лобовым сопротивлением, так как ось x направлена по скорости в бесконечности; через p назовем давление, перпендикулярное к пластинке. Нетрудно видеть, что

$$\left. \begin{aligned} R_y &= \int_{AOBCA} p \cos(n, y) ds; \\ R_x &= \int_{AOBCA} p \cos(n, x) ds; \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

где $AOBCA$ — контур пластинки (фиг. 1); n — нормаль к пластинке.

Выражая давление через скорость, по уравнению Бернулли-Лагранжа имеем:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} = C,$$

где C — величина, одинаковая для всех точек жидкости. За пластинкой в полосе неподвижной жидкости $v=0$, $p=p_0$; на свободных границах струи также $p=p_0$; в бесконечности $v=1$, $p=p_0$.

Из последнего условия находим: $\frac{p_0}{\rho} + \frac{1}{2} = C$.

Таким образом окончательно имеем следующую формулу для давления:

$$p = p_0 + \frac{\rho}{2} (1 - v^2). \quad (17)$$

Как показывает формула (17), подинтегральная функция в формулах (16) в точке B обращается в бесконечность. Следовательно, интегралы (16) являются несобственными. Их будем рассматривать, как пределы интегралов, взятых по контуру $AOabdCA$ (фиг. 5) при стремлении диаметра выкинутой области abd к нулю. При подсчете интегралов таким способом получим величину сопротив-

ления, соответствующую действительности в том смысле, как это указано в § 1. Принятый способ вычисления сопротивления соответствует методу Леви-Чивита и Вилла (Villat).

Обращаясь к вычислению интегралов (16), имеем для вектора полного сопротивления R в комплексной плоскости следующее выражение:

$$R = R_x + iR_y = \frac{1}{i} \int_L p dz,$$

или

$$R = \frac{1}{i} \int_{L'} \left[p_0 + \frac{\rho}{2} (1 - v^2) \right] dz + \frac{1}{i} \int_{CA} p_0 dz = \frac{1}{i} \int_L p_0 dz + \frac{\rho}{2i} \int_{L'} (1 - v^2) dz;$$

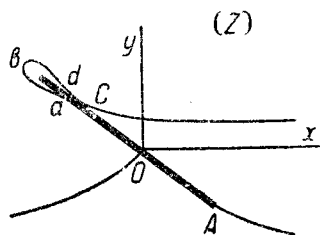
здесь L — контур $AOabdCA$ и $L' = AOabdC$.

Так как первый член в последней формуле обращается в нуль, то

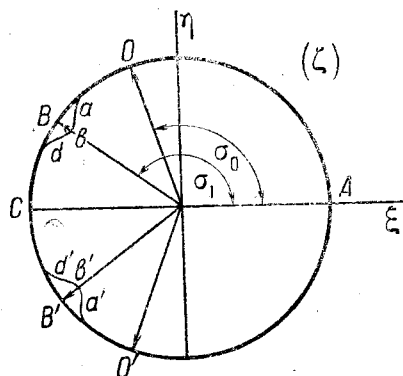
$$R = \frac{\rho}{2i} \int_{L'} (1 - v^2) dz;$$

откуда, в силу формул $dz = df e^{i\omega}$ и $v = e^\tau$

$$R = \frac{\rho}{2i} \int_{L'} e^{i\omega} df - \frac{\rho}{2i} \int_{L'} e^{2\tau + i\omega} df. \quad (18)$$



Фиг. 5. Контур, по которому взяты интегралы формулы (18).



Фиг. 6. Контур, по которому взят интеграл формулы (20).

Так как функции ω и f заданы на плоскости (ζ) , то интеграл в формуле (18) будем считать взятым по контуру, обозначенному теми же буквами, но на плоскости (ζ) (фиг. 6).

Функцию $\omega(\zeta)$ аналитически (по принципу симметрии) продолжим на полуокруг, симметричный с данным по отношению к диаметру. Нетрудно видеть, что

$$i\omega\left(\frac{1}{\zeta}\right) = i\theta + \tau = i\theta + 2\tau - \tau = i\omega(\zeta) + 2\tau.$$

Кроме того, значения $\bar{z} df$ в точках ζ и $\frac{1}{\zeta}$ равны между собою. Поэтому имеем:

$$-\int_{L'} e^{2\tau + i\omega} df = -\int_{L_1'} e^{i\omega} df = \int_{L_1'^-} e^{i\omega} df, \quad (19)$$

где $L_1' = AO'a'b'd'C$ — контур, симметричный с данным относительно диаметра AC ; $L_1'^- = Cd'b'a'O'A$.

Заменяя в (18) второй член из (19), для вектора сопротивления находим окончательно такую формулу:

$$R = \frac{\rho}{2i} \int_{\Gamma} e^{i\omega} \frac{df}{d\zeta} d\zeta, \quad (20)$$

где через Γ обозначен замкнутый контур $AOabdCd'b'a'O'A$.

В области, ограниченной контуром Γ , функция $e^{i\omega} \frac{df}{d\zeta}$ имеет только одну особую точку — полюс $\zeta = 0$; следовательно, для вычисления интеграла (20) необходимо найти вычет относительно этого полюса.

Так как

$$e^{i\omega(\zeta)} = 1 + \zeta i\omega'(0) + \frac{\zeta^2}{2} [i\omega''(0) - \omega'^2(0)] + \dots$$

и

$$\frac{df}{d\zeta} = \frac{a^2}{2} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} - 2 \cos \sigma_0 \right) \left(1 - \frac{1}{\zeta^2} \right),$$

то искомый вычет равняется:

$$-\frac{a^2}{4} [i\omega''(0) - \omega'^2(0)] + ia^2\omega'(0) \cos \sigma_0.$$

Так как интеграл равняется вычету, умноженному на $2\pi i$, то

$$R = \rho\pi a^2 \left\{ i\omega'(0) \cos \sigma_0 - \frac{1}{4} [i\omega''(0) - \omega'^2(0)] \right\}. \quad (21)$$

Из формулы (21), очевидно, следует, что

$$R_x = \frac{\rho\pi a^2}{4} \omega'^2(0); \quad R_y = \frac{\rho\pi a^2}{4} [4\omega'(0) \cos \sigma_0 - \omega''(0)]. \quad (22)$$

Формулы (21) и (22) дают окончательные предельные значения рассматриваемых интегралов, ибо полученные выражения не зависят от величины выкинутой области.

Отметим, что формулы (21) и (22) совпадают с общими формулами Леви-Чивита и Вилла для сопротивления.

Из формулы (2) находим:

$$\left. \begin{aligned} \omega'(0) &= 4 \cos \left(\sigma_1 - \frac{\alpha}{2} \right) \sin \frac{\alpha}{2}; \\ \omega''(0) &= 4 \cos (2\sigma_1 - \alpha) \sin \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Подставив значения $\omega'(0)$ и $\omega''(0)$ из (23) в (22), имеем следующие окончательные формулы для подсчета лобового сопротивления и подъемной силы:

$$R_x = 4\rho\pi a^2 \cos^2 \left(\sigma_1 - \frac{\alpha}{2} \right) \sin^2 \frac{\alpha}{2}; \quad (24)$$

и

$$R_y = \rho\pi a^2 [4 \cos (\sigma_1 - \alpha) \cos \left(\sigma_1 - \frac{\alpha}{2} \right) \sin \frac{\alpha}{2} - \cos (2\sigma_1 - \alpha) \sin \alpha]. \quad (25)$$

§ 4. Связь между сопротивлениями бесконечно тонкой плоской пластинки и пластинки округленной с малой, но конечной толщиной.

В § 1 было высказано утверждение, что сопротивление бесконечно тонкой плоской пластинки, вычисленное по формулам (21), (24) и (25) § 3, будет сколь угодно мало отличаться от сопротивления некоторой обтекаемой со срывом струй пластинки с округленным профилем, но достаточно малой толщины.

В настоящем параграфе мы докажем это положение на примере контура (фиг. 7), состоящего из двух прямых Ad и AC , наклоненных друг к другу под малым углом $\Delta\alpha$, и касающейся их в точках d и d' дуги круга dBd' малого радиуса e .

Вопрос о существовании функции, дающей обтекание, указанное на фиг. (7), и об ее эффективном построении сводится к решению интегрального уравнения Вилла¹⁾, и мы его в настоящей статье касаться не будем. Однако гипотезу о существовании такого потока мы сделаем.

При доказательстве основной теоремы настоящего параграфа нам придется воспользоваться тем, что сколь угодно малой дуге dBd' плоскости (z) соответствует

¹⁾ H. Villat, Sur la résistance des fluides, Thèse. Paris 1911 (Gauthier Villars).

также сколь угодно малая дуга круга плоскости (ζ) (фиг. 8). Это непосредственно вытекает из непрерывности функции, дающей конформное отображение.

Переходя к вычислению сопротивления, имеем, как известно, что функция дается интегралом типа Пуассона:

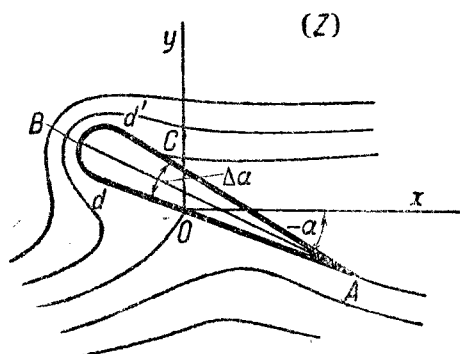
$$\omega(\zeta) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \Phi(\sigma) \frac{1 - \zeta^2}{1 - 2\zeta \cos \sigma + \zeta^2} d\sigma;$$

отсюда

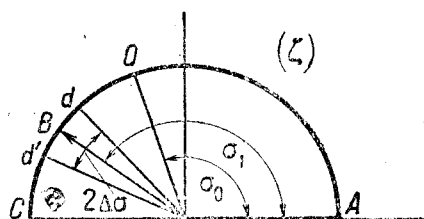
$$\left. \begin{aligned} \omega'(0) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \Phi(\sigma) \cos \sigma d\sigma; \\ \omega''(0) &= \frac{4}{\pi} \int_0^\pi \Phi(\sigma) \cos 2\sigma d\sigma; \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

здесь $\Phi(\sigma) = \theta(\sigma)$ на контуре пластинки.

Функция $\Phi(\sigma)$ принимает следующие значения: на AO — $\Phi(\sigma) = -\alpha$; на Od — $\Phi(\sigma) = 180 - \alpha$; на бесконечно малой, в силу сделанного замечания, дуге $dBd' = \Delta\sigma$ — $\Phi(\sigma)$ изменяется от $\Phi(\sigma) = 180 - \alpha$ до $\Phi(\sigma) = -\alpha - \Delta\alpha$. Разбиваем пределы интегрирования (фиг. 8) на части от 0 до σ_0 , от σ_0 до $\sigma_1 - \Delta\sigma$; от $\sigma_1 - \Delta\sigma$ до $\sigma_1 + \Delta\sigma$, от $\sigma_1 + \Delta\sigma$ до π .



Фиг. 7. Контур, состоящий из двух прямых, наклоненных друг к другу, и дуги dBd' .



Фиг. 8. Плоскость переменного $\zeta = \xi + i\eta$.

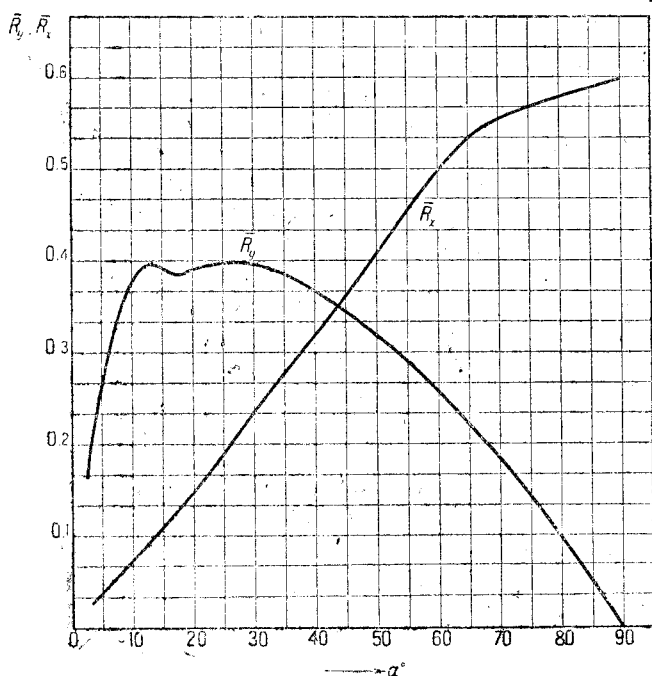
Тогда, ограничиваясь рассмотрением первого интеграла формул (26), так как для второго интеграла рассуждения остаются те же самые, получаем:

$$\begin{aligned} \omega'(0) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\sigma_0} (-\alpha) \cos \sigma d\sigma + \frac{2}{\pi} \int_{\sigma_0}^{\sigma_1 - \Delta\sigma} (180 - \alpha) \cos \sigma d\sigma + \frac{2}{\pi} \int_{\sigma_1 - \Delta\sigma}^{\sigma_1 + \Delta\sigma} \Phi(\sigma) \cos \sigma d\sigma + \\ &+ \frac{2}{\pi} \int_{\sigma_1 + \Delta\sigma}^{\pi} (-\alpha - \Delta\alpha) \cos \sigma d\sigma, \end{aligned}$$

или

$$\left. \begin{aligned} \omega'(0) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\sigma_0} (-\alpha) \cos \sigma d\sigma + \frac{2}{\pi} \int_{\sigma_0}^{\sigma_1} (180 - \alpha) \cos \sigma d\sigma + \\ &+ \frac{2}{\pi} \int_{\sigma_1}^{\sigma_1 + \Delta\sigma} (-\alpha \cos \sigma) d\sigma + \frac{2}{\pi} \int_{\sigma_1}^{\sigma_1 - \Delta\sigma} (180 - \alpha) \cos \sigma d\sigma + \\ &+ \frac{2}{\pi} \int_{\sigma_1 - \Delta\sigma}^{\sigma_1 + \Delta\sigma} \Phi(\sigma) \cos \sigma d\sigma + \frac{2}{\pi} \int_{\sigma_1 + \Delta\sigma}^{\pi} (-\alpha - \Delta\alpha) \cos \sigma d\sigma + \\ &+ \frac{2}{\pi} \int_{\sigma_1}^{\pi} (-\Delta\alpha) \cos \sigma d\sigma. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Первые три интеграла те же, как и в случае бесконечно тонкой пластинки; следующие три интеграла по теореме о среднем значении могут быть представлены в виде произведения конечной величины на $\Delta\sigma$; наконец, последний интеграл равен произведению $\Delta\alpha$ на конечное число. Таким образом при достаточно малых $\Delta\sigma$ и $\Delta\alpha$ могут быть сделаны сколь угодно малыми четыре последних интеграла; т. е. $\omega'(0)$ из формулы (27) сколь угодно мало отличается от этой величины для бесконечно тонкой пластинки. Аналогичные рассуждения применимы и для функции $\omega''(0)$. Если теперь обратимся к формулам (21) и (22) предыдущего параграфа, то из доказанного относительно $\omega'(0)$ и $\omega''(0)$ непосредственно следует, что сопротивление рассматриваемого контура будет при достаточно малых $\Delta\sigma$ и $\Delta\alpha$ сколь угодно мало отличаться от сопротивления бесконечно тонкой пластинки. Таким образом требуемое доказано.



Фиг. 9а. Кривые лобового сопротивления \bar{R}_x и подъемной силы \bar{R}_y , пересчитанные на бесконечный размах.

§ 5. Лобовое сопротивление.

В настоящем параграфе мы займемся вычислением лобового сопротивления и сравнением результатов этих подсчетов с экспериментом.

В формулу (24) § 3 входит кроме угла атаки α свободный параметр σ_1 , выбор которого определяет положение точки срыва струй C (фиг. 1).

Значение σ_1 мы будем брать таким, чтобы для данного угла атаки подъемная сила, вычисленная по формуле (25) § 3, совпадала с соответствующей величиной, полученной из эксперимента.

На фиг. 9а приведены кривые лобового сопротивления \bar{R}_x и подъемной силы \bar{R}_y по α , пересчитанные на бесконечный размах и взятые по продувкам лаборатории Эйфеля¹⁾. В таблице 1 (см. приложение)²⁾

приведены соответствующие цифровые данные. На фиг. 9б изображена поляра до пересчета для прямоугольной пластинки 90×15 см.

¹⁾ G. Eiffel, La résistance de l'air et l'aviation, Paris 1910.

По нашему заданию в лаборатории ЭАО ЦАГИ были сделаны продувки, которые дали результаты, почти совпадающие с данными Эйфеля.

²⁾ Чтобы не загромождать текст, таблицы помещены в приложении.

(при $g=1$ и $l=1$)

В таблице 2 (см. приложение) даны значения $\frac{R_y}{\pi}$, вычисленные по формуле (25) § 3 как функции угла атаки α и параметра σ_1 . На фиг. 10, 11 и 12 изображены кривые, построенные по этим данным. На этих фигурах по оси абсцисс отложены значения σ_1 в градусах; по оси ординат значения $\frac{R_y}{\pi}$.

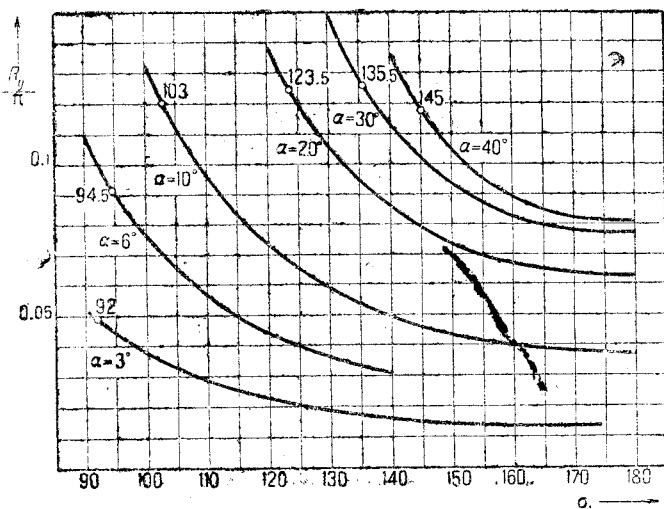
На фиг. 10 даны кривые для углов атаки $\alpha = 3^\circ; 6^\circ; 10^\circ; 20^\circ; 30^\circ; 40^\circ$. На фиг. 11 для $\alpha = 50^\circ; 70^\circ; 80^\circ$ и на фиг. 12 для $\alpha = 88^\circ$.

По этим кривым найдены, согласно вышесказанному, значения параметра σ_1 ; для каждого α бралось опытное значение $\frac{R_y}{\pi}$; на соответствующей кривой отыскивалась точка с ординатой, равной этому значению; абсцисса полученной точки и давала искомую величину σ_1 . Найденные таким образом точки на фигурах отмечены кружками и около каждой из них поставлены соответствующие значения σ_1 в градусах. Эти же значения σ_1 помещены в таблице 1.

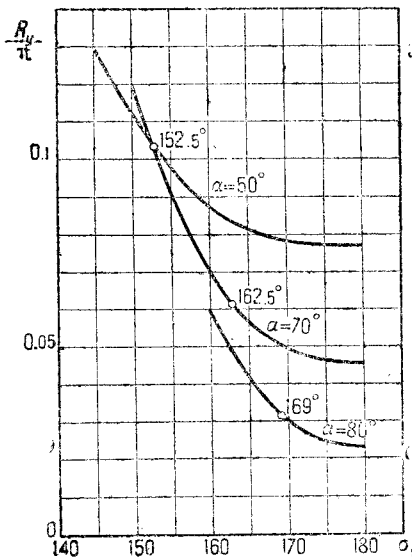
Прежде чем переходить к лобовому сопротивлению, остановимся на результатах вычисления величины $\frac{AC}{l}$ по формуле (11) § 2. Эти вычисления сделаны для найденных значений σ_1 ; соответствующая кривая на фиг. 13, где по оси ординат отложены $\frac{AC}{l}$, а по оси абсцисс α .

Эти кривые показывают, что для углов атаки α до 6° $\frac{AC}{l} < 2,3$; такая малая величина $\frac{AC}{l}$ указывает на то, что здесь точка срыва C весьма близка к другой точке срыва A . При $\alpha > 6^\circ$ $\frac{AC}{l}$ весьма быстро растет и достигает уже при $\alpha = 20^\circ$ значения $\frac{AC}{l} = 0,865$. Таким образом при увеличении угла атаки роль срыва струй увеличивается и уже при $\alpha = 30^\circ$, где $\frac{AC}{l} = 0,94$, имеет место режим, характеризующийся почти полным срывом струй.

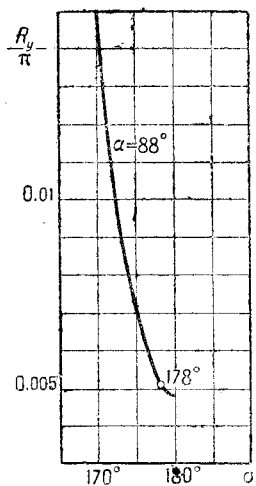
Обращаемся теперь к анализу лобового сопротивления. По найденным значениям σ_1 и соответствующим углам атаки по формуле (24) § 3 подсчитаны величины R_x , которые приведены в таблице 1; там даны в про-



Фиг. 10. Кривые для углов атаки $\alpha = 3^\circ, 6^\circ, 10^\circ, 20^\circ, 30^\circ, 40^\circ$.



Фиг. 11. Кривые для углов атаки $\alpha = 50^\circ, 70^\circ, 80^\circ$.



Фиг. 12. Кривая для угла атаки $\alpha = 88^\circ$.

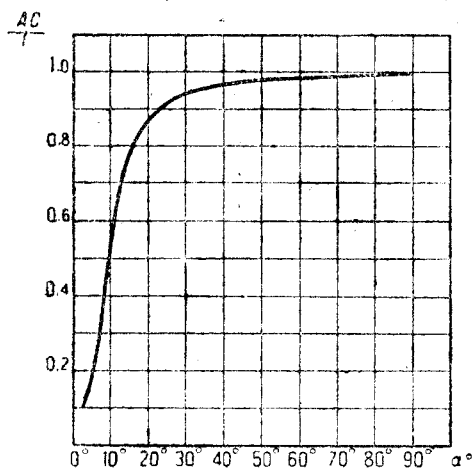
Режим, характеризующийся почти полным срывом струй.

Обращаемся теперь к анализу лобового сопротивления.

По найденным значениям σ_1 и соответствующим углам атаки по формуле (24) § 3 подсчитаны величины R_x , которые приведены в таблице 1; там даны в про-

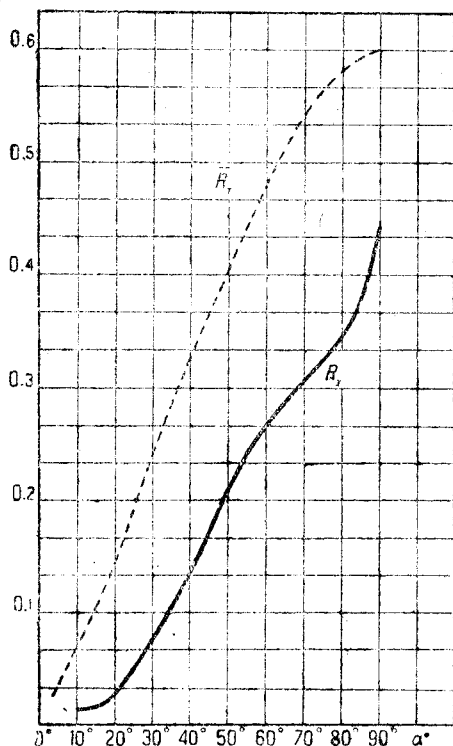
(при $g=1$ и $l=1$)

центах отношения $\frac{R_x}{R_x}$. На фиг. 14 изображена, во-первых, кривая (нижняя сплошная) вычисленных таким образом значений R_x по α и, во-вторых, опытная кривая (верхняя пунктирная) \bar{R}_x по α .



Фиг. 13. Кривая значений $\frac{AC}{l}$.

он не учитывает вязкости жидкости. Для того чтобы вычислить действительное лобовое сопротивление, следует учесть, с одной стороны, подсос $\Delta p'$, создаваемый движением потока в мертвой зоне за счет сил вязкости, с другой стороны— профильное сопротивление, создаваемое силами вязкости на элементах крыла, обтекаемых потоком (т. е. на элементах крыла, не прикасающихся с мертвой зоной).



Фиг. 14. Кривая значений R_x по α (нижняя сплошная) и опытная кривая R_x по α (верхняя пунктирная).

Из анализа полученных для R_x величин мы видим, что для углов, меньших 10° , вычисленное нами сопротивление составляет весьма малую величину по сравнению с действительным лобовым сопротивлением \bar{R}_x .

При $\alpha = 10^\circ$ $\frac{R_x}{\bar{R}_x} = 18,2\%$; при даль-

нейшем увеличении углов $\frac{R_x}{\bar{R}_x}$ растет и достигает 73% при $\alpha = 90^\circ$. Таким образом для α от 10° до 90° сопротивление R_x , т. е. сопротивление пластинки при ее обтекании идеальной жидкостью со срывом струй по обобщенной схеме Кирхгофа, является слагающей сопротивления, вполне сравнимой с его полной величиной. Рассматриваемый теоретический метод не дает, однако, полной величины лобового сопротивления, так как

Считаем, как это обычно делается в гидравлике, подсос пропорциональным квадрату скорости; для вычисления добавочной силы, создаваемой подсосом, очевидно, надо помножить $\Delta p'$ на площадь соприкосновения крыла с мертвой зоной. Нас, однако, интересует только слагающая этой силы по направлению потока, которая будет, очевидно, равна: $\Delta p' F$, где $F = AC \sin \alpha$; для AC берем те значения, которые помещены в таблице 1, следовательно, отвечающие обтеканию со срывом струй без учета вязкости.

Силу поверхностного трения потока о крыло также считаем пропорциональной квадрату скорости и направленной по элементам крыла, т. е. в нашем случае плоской пластинки под углом α к скорости потока. Считая, что равнодействующая этих сил трения R'_x постоянна, получаем для величины ее слагающей, участвующей в профильном сопротивлении, следующее выражение: $R'_x \cos \alpha$.

Таким образом \bar{R}_x —теоретическая величина полной силы лобового сопротивления—будет:

$$\bar{R}_x = R_x + R'_x \cos \alpha + \Delta p' F; \quad (28)$$

где R'_x и $\Delta p'$ в нашем случае для $v = 1$

(R'_x и $\Delta p'$ — отнесены к скорости на свободной струе) — постоянные величины, в общем случае они равны произведению из этих постоянных на v^2 .

Величины R'_x и $\Delta p'$ надо определить так, чтобы отклонения вычисленных величин сопротивления \bar{R}_x от экспериментальных R_x были наименьшими.

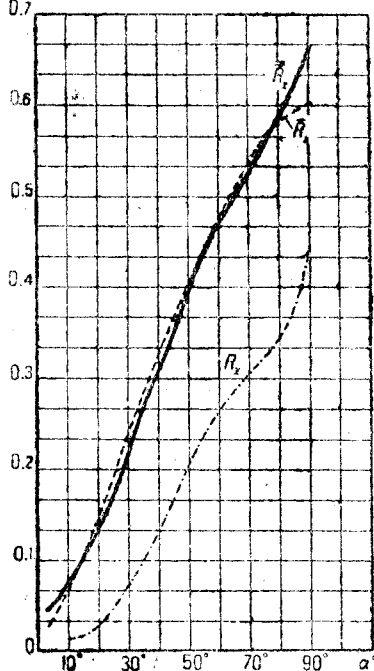
Здесь уместно применить способ наименьших квадратов. В результате обработки этим способом по данным для $\alpha = 3^\circ; 6^\circ; 10^\circ; 20^\circ; 30^\circ; 40^\circ; 50^\circ; 70^\circ; 90^\circ$ получаем:

$$\bar{R}_x = R_x + 0,047 \cos \alpha + 0,223 F, \quad (29)$$

т. е.

$$R'_x = 0,047 \text{ и } \Delta p' = 0,223.$$

Результаты подсчетов по формуле (29) дают хорошее совпадение с экспериментом (от 2 до 5%) кроме $\alpha = 30^\circ$, где ошибка достигает 9% для углов атаки от 20° до 70° ; при 3° отклонение — 81%, при 6° — 25%, при 10° — 10% и при 90° — 10%. Кривая \bar{R}_x приведена на фиг. 15 (верхняя сплошная кривая). На этой же фигуре верхняя пунктирная кривая дает \bar{R}_x и нижняя пунктирная — R_x .



Фиг. 15. Кривая результатов подсчетов по формуле (29) (верхняя сплошная).

§ 6. Подъемная сила.

В настоящем параграфе мы займемся анализом экспериментальной кривой R_y , как функции α .

В таблице (А) приведены для взятых из опыта значений \bar{R}_y соответствующие величины $\sigma_0 = \sigma_1 - \alpha$ и $\frac{\varphi_A}{\varphi_C}$; где φ_A и φ_C — соответствующие значения потенциала скоростей в точках А и С срыва струй (см. фиг. 1).

Таблица (А)

α (в градус.)	3	6	10	20	30	40	50	70	80	88	90
$\sigma_0 = \sigma_1 - \alpha$ (в градус.)	89	88,5	93	103,5	105,5	105	102,5	92,5	89	90	90
$\frac{\varphi_A}{\varphi_C} = \operatorname{tg}^4 \frac{\sigma_0}{2}$	0,96	0,9	1,24	2,58	2,99	2,87	2,35	1,19	0,96	1	1

Анализ этой таблицы показывает, что значения σ_0 имеют весьма мало меняющуюся величину для α от 0° до 10° и от 90° и затем другую, также почти постоянную величину, для α от 20° до 50° .

Для того чтобы некоторым образом пояснить смысл постоянства σ_0 , обратимся к формуле:

$$f = \varphi + i\psi = a^2 \left[\cos \sigma_0 - \frac{1}{2} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right) \right]^2.$$

Полагая здесь $\psi = 0$ и $\zeta = \pm 1$, мы получим величину φ_A и φ_C потенциала скоростей в точках А и С срыва струй потока с нашей пластинки (фиг. 1).

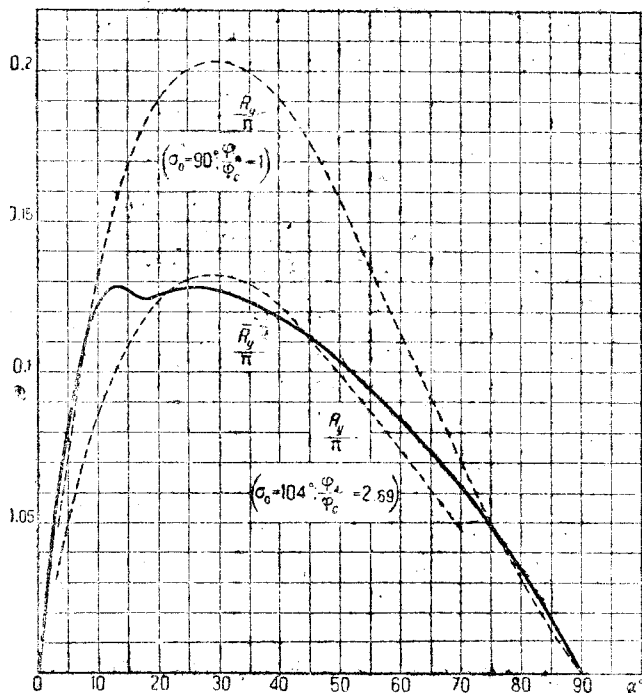
Нетрудно видеть, что

$$\frac{\varphi_A}{\varphi_C} = \left(\frac{\cos \sigma_0 - 1}{\cos \sigma_0 + 1} \right)^2 = \operatorname{tg}^4 \frac{\sigma_0}{2}. \quad (30)$$

Формула (30) показывает, что при постоянной σ_0 величина $\frac{\varphi_A}{\varphi_C}$ также постоянна.

Следовательно, мы имеем, что при малых и больших углах атаки отношение потенциалов скоростей в точках срыва имеет одно почти постоянное значение; при средних углах это отношение имеет другую постоянную величину.

Предыдущий анализ показывает, что, задаваясь двумя различными, взятыми из обработки эксперимента значениями $\frac{\varphi_A}{\varphi_C}$, можно построить кривую подъемных сил, близкую к опытной.



Фиг. 16. Кривые $\frac{R_y}{\pi}$ для $\frac{\varphi_A}{\varphi_C} = 1$ и $\frac{\varphi_A}{\varphi_C} = 2,69$.

На фиг. 16 мы построили кривую для $\frac{\varphi_A}{\varphi_C} = 1$ и кривую при $\frac{\varphi_A}{\varphi_C} = 2,69$ ($\sigma_0 = 104^\circ$).

Мы видим, что кривая для $\frac{\varphi_A}{\varphi_C} = 1$ близко подходит к опытной для α от 0° до 10° (наибольшее отклонение $8,3\%$) и от 73° до 90° (наибольшее отклонение 10%), здесь, следовательно, в известном смысле имеется один режим потока.

Кривая, соответствующая $\frac{\varphi_A}{\varphi_C} = 2,69$, близка к экспериментальной для α от 20° до 55° (максимум отклонения — 5%).

Здесь имеет место существенно отличный режим.

При углах атаки от 10° до 20° и от 55° до 73° имеют некоторые переходные режимы.

Таблица 1.

α°	\bar{R}_y	\bar{R}_x	R_x	$\frac{R_x}{\bar{R}_x} \%$	\bar{R}_x	σ_1°	$\frac{AC}{l}$
3	0,154	0,025	—	—	0,047	92	0,115
6	0,289	0,042	—	—	0,052	94,5	0,23
10	0,38	0,072	0,0132	18,3	0,0795	103	0,53
20	0,392	0,144	0,0268	18,6	0,136	123,5	0,865
30	0,397	0,240	0,0723	30,1	0,218	135,5	0,943
40	0,372	0,320	0,131	41	0,306	145	0,97
50	0,323	0,405	0,206	51	0,407	152,5	0,988
70	0,19	0,536	0,303	56,6	0,526	162,5	0,99
80	0,1	0,580	0,340	58,6	0,590	169	1
88	0,016	0,597	0,410	68,6	0,647	178	1
90	0,00	0,600	0,440	73,3	0,663	180	1

Таблица 2.

$\alpha = 3^\circ$		$\alpha = 6^\circ$		$\alpha = 10^\circ$		$\alpha = 20^\circ$		$\alpha = 30^\circ$	
σ_1°	$\frac{R_y}{\pi}$	σ_1°	$\frac{R_y}{\pi}$	σ_1°	$\frac{R_y}{\pi}$	σ_1°	$\frac{R_y}{\pi}$	σ_1°	$\frac{R_y}{\pi}$
90	0,0536	90	0,110	90	0,203	90	0,437	90	0,773
93	0,0482	93	0,0986	95	0,158	100	0,283	100	0,476
96	0,0423	96	0,0861	100	0,131	110	0,195	105	0,381
98	0,0398	98	0,0805	110	0,0956	120	0,140	120	0,209
100	0,0383	100	0,0774	120	0,0729	125	0,122	130	0,150
105	0,0328	105	0,0652	130	0,06	130	0,107	140	0,114
110	0,0288	110	0,0574	140	0,0494	135	0,0956	145	0,108
120	0,0226	120	0,0447	150	0,0435	145	0,0796	150	0,094
130	0,0187	130	0,0363	160	0,0399	150	0,0743	155	0,0877
140	0,0205	140	0,0310	170	0,0381	160	0,0674	160	0,0832
150	0,0144	150	0,0360	180	0,0376	170	0,0641	170	0,0785
160	0,0151	160	0,0255	—	—	180	0,0633	180	0,0777
170	0,0138	170	0,0244	—	—	—	—	—	—
180	0,0129	180	0,0240	—	—	—	—	—	—

$\alpha = 40^\circ$		$\alpha = 50^\circ$		$\alpha = 70^\circ$		$\alpha = 80^\circ$		$\alpha = 88^\circ$	
σ_1°	$\frac{R_y}{\pi}$	σ_1°	$\frac{R_y}{\pi}$	σ_1°	$\frac{R_y}{\pi}$	σ_1°	$\frac{R_y}{\pi}$	σ_1°	$\frac{R_y}{\pi}$
90	1,282	90	1,949	90	4,548	90	6,97	90	9,899
100	0,735	100	1,110	100	2,366	100	3,464	100	4,715
110	0,451	110	0,644	110	1,283	110	1,826	110	2,406
120	0,288	115	0,498	125	0,528	120	0,993	120	1,269
130	0,192	120	0,388	130	0,392	130	0,517	130	0,654
140	0,136	130	0,241	140	0,215	140	0,265	140	0,324
150	0,105	140	0,157	150	0,118	150	0,129	150	0,145
155	0,0955	145	0,130	155	0,0887	160	0,0592	160	0,0542
160	0,089	150	0,110	160	0,0689	165	0,0408	170	0,0144
165	0,0848	155	0,0963	165	0,0563	170	0,0299	175	0,00693
170	0,0825	160	0,0868	170	0,0492	175	0,0251	176	0,00610
180	0,0818	165	0,081	175	0,0465	180	0,0241	177	0,00551
—	—	170	0,0777	180	0,0462	—	—	178	0,00512
—	—	175	0,0789	—	—	—	—	179	0,00492
—	—	180	0,0769	—	—	—	—	180	0,00489

SUMMARY.

THE GENERALIZED FORM OF KIRCHHOFF'S REPRESENTATION, AND ITS APPLICATION TO THE STUDY OF LILIENTHAL'S CURVE.

The work deals with the flow past a flat plate of a twodimensional stream, according to the generalized form of Kirchhoff's representation, Fig. 1, that was first proposed by S. A. Tchapligin, M. Ac. of Sc. of the U. S. S. R. In § 1 and § 2 is given the deduction, by the method of Levi-Civita, of formulae for the function $f = \varphi + i\psi$ of the complex velocity potential [§ 2, formula (1)], and for the function $\omega = -i \ln \left(\frac{dz}{df} \right)$ [§ 2, formula (2)]. There are also deduced formulae for the length l of the plate [§ 2, formula (8)], and for the distance AC , Fig. 1, between the points of breaking away of the currents; in Art. 4 of § 2 is analysed the curvature of a free current in the neighbourhood of C , and it is shown that the current leaves the plate as represented in Fig. 1.

In § 3 is given a deduction of formulae of Levi-Civita for the lift R_y [formula (25)] and the drag R_x [formula (24)].

Since the velocity at B is infinite, the integrals determining R_x and R_y [formulae (16)] are evaluated as the limits of integrals taken over the contour $AOabdCA$, Fig. 5, it being assumed that the contour abd approaches that of the plate. The formulae obtained are identical with those derived from the general formulae of Levi-Civita.

In § 4 it is shown that the formulae derived for R_x and R_y may be obtained by passing to the limit in the formulae for a rounded plate of small thickness, Fig. 7.

In § 5 and § 6 is given a comparison of data obtained by tests with those calculated by the theoretical formulae for R_x and R_y ($g=1; l=1$).

The arbitrary parameter σ_1 in formulae (24) and (25) (determining the position of points C) is selected so as to make the calculated value of R_y to coincide with its value obtained from tests. The value of R_x computed for these values of σ_1 is represented by the lower curve in Fig. 14; the upper curve represents the test values of R_x . The comparison shows that at angles α less than 10° the calculated drag represents only a small portion of its actual magnitude. When α varies from 10° to 90° the ratio $\frac{R_x}{R_x}$ increases from 18,2 to 730%. Hence in this range of angles the drag component due to the breaking away of currents is of a magnitude comparable to its total magnitude. It should be pointed out, however, that the theoretical method considered fails to completely evaluate the magnitude of drag as it takes no account of viscosity.

To obtain the actual magnitude of the drag there must be taken into the account, on the one hand, the suction $\Delta p'$, created, owing to forces of viscosity, by the flow behind the plate between the lines λ_1 and λ_2 of discontinuity of velocities, and, on the other hand, the aerofoil drag due to forces of viscosity on the elements of the plate washed by the flow.

Assuming, as is usually done in hydraulics, the suction to be proportional to the square of velocity (on free boundaries), the force due to suction is, evidently, equal to $\Delta p'$ times the area of the plate between points A and C . The component of

this force in the direction of the flow is $\Delta p'F$, where $F = AC \sin \alpha$, AC being taken for the calculated as above values of σ_1 (Table 1).

The force of the skin friction, also, is assumed to be proportional to the square of velocity and directed along the elements of the plate, i. e. in the case considered of the flat plate, at an angle α to the velocity of the flow.

Denoting by R_x' the resultant of these frictional forces (referring it to the square of velocity of a free current), there is obtained for the magnitude of the component producing drag the expression $R_x' \cos \alpha$.

Thus the theoretical magnitude of the total drag, \bar{R}_x , becomes equal to

$$\bar{R}_x = R_x + R_x' \cos \alpha + \Delta p'F,$$

where R_x' and $\Delta p'$ in the case considered of $v = 1$ are constants; in the general case their values are to be multiplied by v^2 .

The values of R_x' and $\Delta p'$ are determined so as to make a minimum the deviation of the calculated values of R_x from the experimental ones.

By applying the method of least squares there is obtained $R_x' = 0,047$ and $\Delta p' = 0,223$. For these values of R_x' and $\Delta p'$ the maximum deviation of \bar{R}_x from its experimental value is 10% for α varying from 10 to 90°; in the range of angles from 20 to 70° the maximum deviation is 5¹/₂%, excepting $\alpha = 30^\circ$, in which case the deviation amounts to 9%.

In § 6 is given a method of determination of lift with a close approximation to experimental values in the range of angles from 0 to 90°.

In this method there is considered instead of parameter σ_1 the parameter $\sigma_0 = \sigma_1 - \alpha$. The analysis of data in Table A (p. 19) has shown σ_0 to remain nearly constant and to have the same value in the two ranges of α from 0 to 10° and from 70 to 90°, and another nearly constant value in the range of α from 20 to 50°. The equation satisfied by σ_0 is

$$\frac{\varphi_A}{\varphi_C} = \operatorname{tg}^4 \frac{\sigma_0}{2};$$

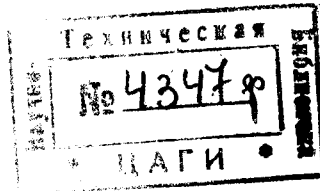
where φ_A and φ_C are the values of the velocity potential at points A and C at which the currents break away from the plate.

Putting $\frac{\varphi_A}{\varphi_C} = 1$ ($\sigma_0 = 90^\circ$) we obtain a curve, Fig. 16, approximating the experimental one for the ranges of α from 0 to 10° and from 75 to 90° (the maximum deviation 10%). Hence in the two ranges named the regimen is, in a sense, the same.

For $\frac{\varphi_A}{\varphi_C} = 2,69$ ($\sigma_0 = 104^\circ$) the curve closely approximates the experimental one in the range of α from 20 to 55°, the maximum deviation being 5%. The regimen in this range is essentially different. Within the ranges of α from 10 to 20° and from 55 to 70° there are observed transitional regimens.

ОГЛАВЛЕНИЕ.

Предисловие		3
Краткое содержание		5
§ 1. Постановка задачи		6
§ 2. Определение кинематических элементов потока		7
1. Определение функции ω		8
2. Определение a^2		10
3. Формула для AC		11
4. Исследование кривизны свободной струи около точки C		12
§ 3. Вывод формул для подъемной силы и лобового сопротивления		14
§ 4. Связь между сопротивлениями бесконечно тонкой плоской пластинки и пластинки округленной с малой, но конечной толщиной		16
§ 5. Лобовое сопротивление		19
§ 6. Подъемная сила		21
Приложение		22
Summary		22



Редакция: Г. А. Вольперта. Оформление С. Л. Дыман.
 Корректура З. В. Смирновой. Выпускающий М. М. Волкович.
 Сдано в производство 3/I 1934 г. Подписано к печати 25/VI 1934 г.
 Печати. листов 1 $\frac{1}{2}$. Тираж 2000. Формат бумаги 72 \times 105 $\frac{1}{10}$. Печати. зн. в бумажн. листе 70 224.
 Заказ № 34. ГТТИ № 308. Уполномоченный Главлита В-73448.

О П Е Ч А Т К И

Страница	Строка		Напечатано	Должно быть
	сверху	снизу		
7	3	—	$\left. + \frac{1}{\epsilon} \right) \Bigg]$	$\left. + \frac{1}{\epsilon} \right) \Bigg]^2 \quad \checkmark$
7	5	—	$(\sqrt{\varphi_C} - \sqrt{\varphi_A})^2$	$(\sqrt{\varphi_C} + \sqrt{\varphi_A})^2 \quad \checkmark$
7	5	—	$\frac{\sqrt{\varphi_C} + \sqrt{\varphi_A}}{\sqrt{\varphi_C} - \sqrt{\varphi_A}}$	$\frac{\sqrt{\varphi_C} - \sqrt{\varphi_A}}{\sqrt{\varphi_C} + \sqrt{\varphi_A}} \quad \checkmark$
9	—	10	$-\frac{1}{4} \cos(2\varphi - \sigma_1 + \sigma_0)$	$-\frac{1}{4} \cos(2\varphi - \sigma_1 + \sigma_0) \sin \sigma_1 \quad \checkmark$
9	—	6	$\frac{1}{8} \sin(4\varphi - 2\sigma_1 + 2\sigma_0)$	$\frac{1}{8} \sin(4\varphi - 2\sigma_1 + \sigma_0) \quad \checkmark$
13	8	—	$\int_{L'} p_0 dz$	$\int_L p_0 dz \quad \checkmark$
17	1	—	(25)	(25) (при $\rho = 1$ и $l = 1$) \checkmark
17	—	2	(24)	(24) (при $\rho = 1$ и $l = 1$) \checkmark
22	—	20	R_y	$R_y (\rho = 1; l = 1). \quad \checkmark$

Я. И. Секерж-Зенькович. Обобщенная схема Кирхгофа и ее применение к изучению полярных Лилиентала.